



# Corso di Idraulica

Prof. A. Balzano

ESERCITAZIONE N°4  
SPINTE DINAMICHE

# Spinte dinamiche

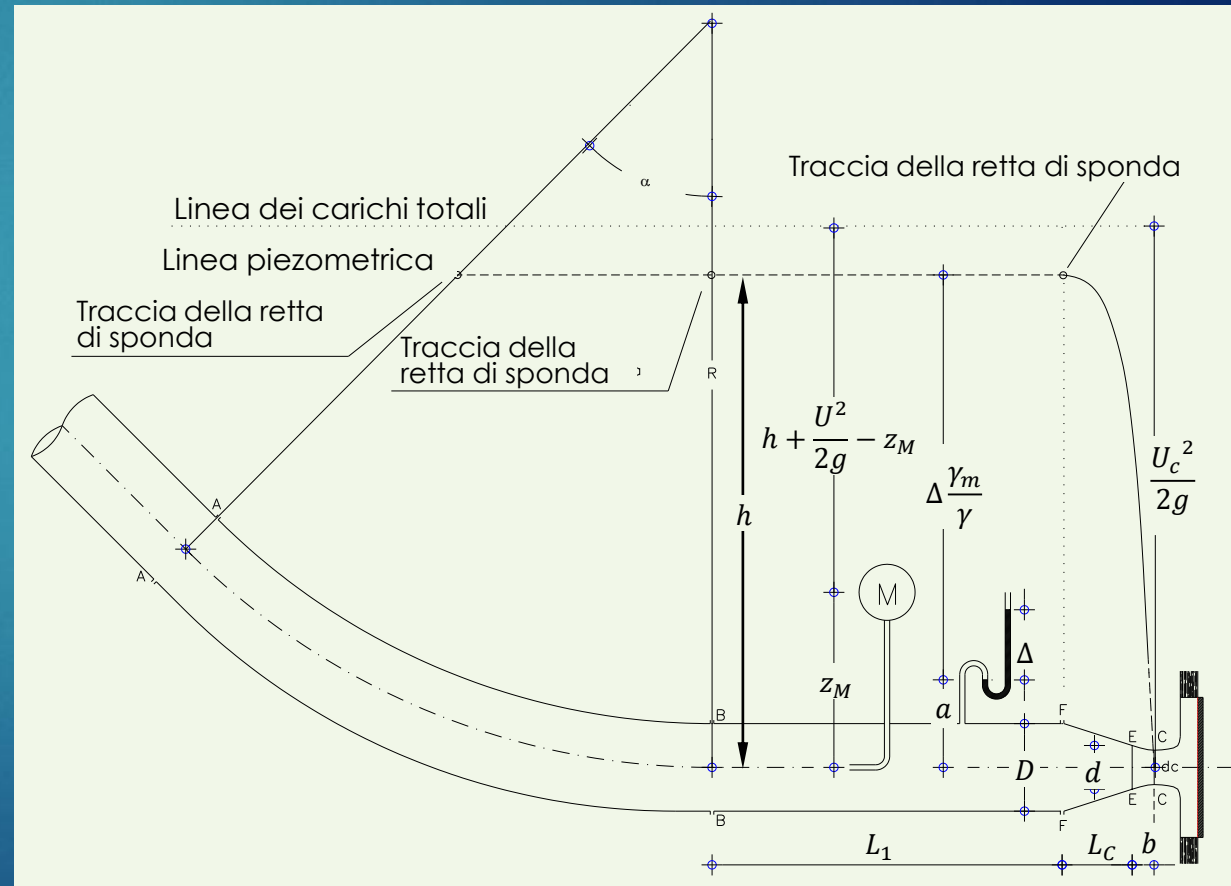
La condotta di diametro  $D$  in figura termina con un convergente ed un ugello di diametro  $d$ . Davanti al getto ad asse orizzontale uscente dall'ugello, avente coefficiente di contrazione  $C_c$ , si ponga una piastra piana perpendicolare al getto.

Assegnate le dimensioni geometriche della parte terminale della condotta e l'indicazione del manometro semplice a mercurio  $\Delta$ , calcolare:

- 1) la portata effluente dall'ugello,  $q$ ;
- 2) l'indicazione del manometro metallico collegato al tubo di Pitot;
- 3) la spinta sul convergente;
- 4) la spinta sulla piastra piana

Dati:

– $D = 0,50 \text{ m}$	– $z_M = 0,50 \text{ m}$	– $a = 0,30 \text{ m}$
– $d = 0,125 \text{ m}$	– $\Delta = 0,20 \text{ m}$	– $b = 0,06 \text{ m}$
– $\gamma = 9\,806 \text{ Nm}^{-3}$	– $C_c = 0,85$	– $L = 1 \text{ m}$
– $\gamma_m = 132\,970 \text{ Nm}^{-3}$	– $L_C = 0,45 \text{ m}$	





# Portata effluente e manometro

## ► Calcolo della portata effluente

- Quota di riferimento = asse condotta
- Tratto di limitata estensione ( $L = 1$  m)
- Schema di fluido ideale

$$h + \alpha \frac{U^2}{2g} = h_c + \alpha \frac{U_c^2}{2g}$$

$$- \alpha = 1 \longrightarrow h + \frac{q^2}{2g\Omega^2} = h_c + \frac{q^2}{2g\Omega_c^2}$$

$$- h_c = z_c + \frac{p_c}{\gamma} = 0 \quad ; \quad h = a + \Delta \frac{\gamma_m}{\gamma}$$

$$- q = \frac{\Omega \Omega_c}{\sqrt{\Omega^2 - \Omega_c^2}} \sqrt{2gh}$$

Dati:

- $D = 0,50$ m	- $z_M = 0,50$ m	- $a = 0,30$ m
- $d = 0,125$ m	- $\Delta = 0,20$ m	- $b = 0,06$ m
- $\gamma = 9\,806$ Nm <sup>-3</sup>	- $C_c = 0,85$	- $L = 1$ m
- $\gamma_m = 132\,970$ Nm <sup>-3</sup>	- $L_c = 0,45$ m	

## ► Misura manometro metallico

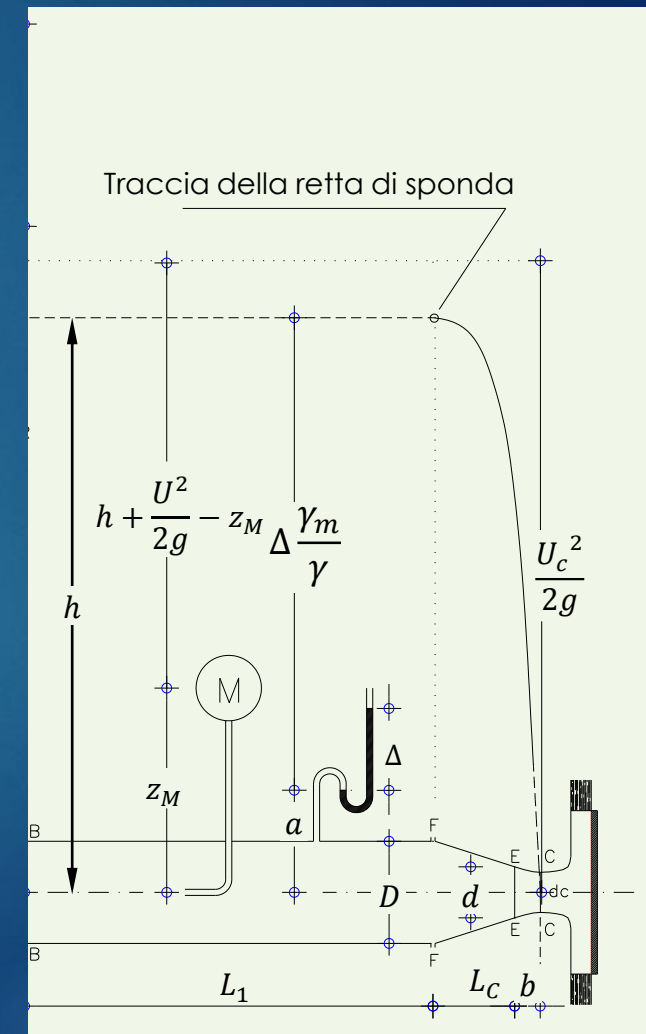
- Manometro collegato al tubo di Pitot
- quota piezometrica dell'acqua nel manometro  $h_M =$  carico totale  $H_a$  della particella che incide sul punto di ristagno

$$H_a = h + \frac{u_a^2}{2g} \cong h + \frac{U^2}{2g} = H$$

- $H$  carico totale (medio) della corrente

$$h_M = z_M + \frac{p_M}{\gamma} = H = h + \frac{U^2}{2g}$$

$$p_M = \gamma \left( h + \frac{U^2}{2g} - z_M \right)$$



# Spinta sul convergente

## ► Equazione globale del moto

- Volume di controllo fra sezioni FF e cc

$$\vec{I} + \vec{M} = \vec{G} + \vec{\Pi}$$

$$\vec{I} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \vec{u} dV \quad \vec{G} = \int_{V_c} \rho \vec{f}_m dV$$

$$\vec{M} = \int_{S_c} \rho \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{n} dS \quad \vec{\Pi} = \int_{S_c} \vec{\tau}_n dS$$

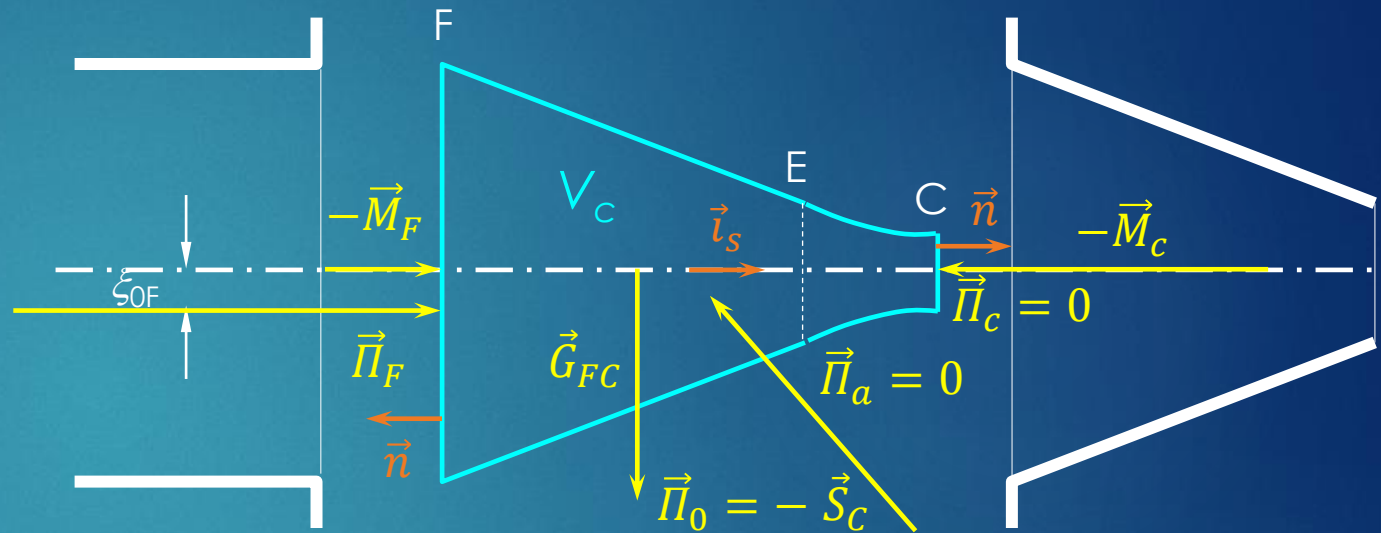
$$- \vec{I} = 0 \quad \text{per moto stazionario}$$

$$- \vec{G} = \int_{V_c} -\rho g \nabla z dV = -\gamma V_c \nabla z$$

applicata nel baricentro di  $V_c$

Dati:

- $D = 0,50 \text{ m}$	- $z_M = 0,50 \text{ m}$	- $\alpha = 0,30 \text{ m}$
- $d = 0,125 \text{ m}$	- $\Delta = 0,20 \text{ m}$	- $b = 0,06 \text{ m}$
- $\gamma = 9\,806 \text{ Nm}^{-3}$	- $C_c = 0,85$	- $L = 1 \text{ m}$
- $\gamma_m = 132\,970 \text{ Nm}^{-3}$	- $L_c = 0,45 \text{ m}$	



## ► Dettaglio dei termini dell'equazione globale del moto

$$\vec{M}_F + \vec{M}_0 + \vec{M}_a + \vec{M}_C = \vec{G} + \vec{\Pi}_F + \vec{\Pi}_0 + \vec{\Pi}_a + \vec{\Pi}_C$$

- $\vec{M}_0 = 0$  per condizione di aderenza
- $\vec{M}_a = 0$  perché la superficie è un tubo di flusso
- $\vec{\Pi}_a = \vec{\Pi}_C = 0$  perché  $p = 0$
- $\vec{\Pi}_0 = -\vec{S}_C$  per il principio di azione e reazione





# Spinta sul convergente

## ► Equazione globale del moto

$$\vec{M}_F + \vec{M}_C = \vec{G} + \vec{\Pi}_F + \vec{\Pi}_0 \quad ; \quad \vec{\Pi}_0 = -\vec{S}_C$$

$$\vec{S}_C = -\vec{M}_F - \vec{M}_C + \vec{G} + \vec{\Pi}_F$$

- $\vec{\Pi}_F = -\vec{n} p_{GF} \Omega = \vec{i}_s p_{GF} \Omega$

- $p_{GF} = \gamma \zeta_{GF} = \gamma h$

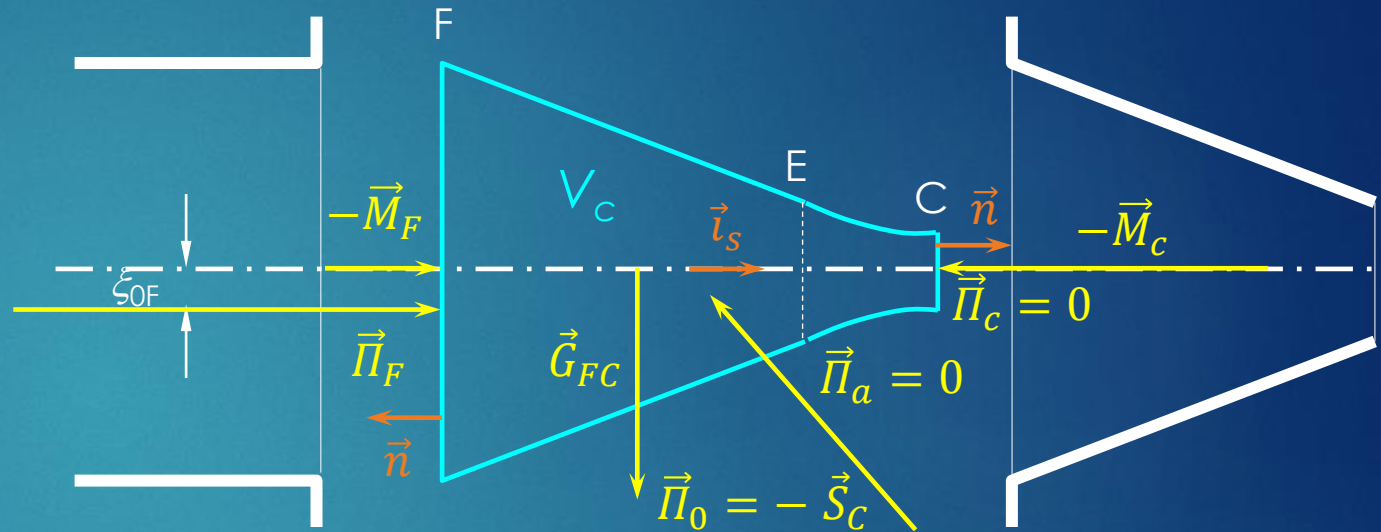
- Applicata in centro di spinta

- $\xi_{0F} = \frac{I_{xx0}}{M_S} \quad ; \quad I_{xx0} = \frac{\pi D^4}{64} \quad ; \quad M_S = h\Omega$

- $\eta_{0F} = \frac{I_{xy0}}{M_S} = 0$

Dati:

– D = 0,50 m	– z <sub>M</sub> = 0,50 m	– a = 0,30 m
– d = 0,125 m	– Δ = 0,20 m	– b = 0,06 m
– γ = 9 806 Nm <sup>-3</sup>	– C <sub>c</sub> = 0,85	– L = 1 m
– γ <sub>m</sub> = 132 970 Nm <sup>-3</sup>	– L <sub>C</sub> = 0,45 m	



- $\vec{M}_F = \int_{\Omega_F} \rho \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{n} d\Omega = - \int_{\Omega_F} \rho \vec{u} u d\Omega = -\vec{i}_s \rho \int_{\Omega_F} u^2 d\Omega =$   
 $= -\vec{i}_s \rho \beta U^2 \Omega$       retta d'azione  $\equiv$  asse della corrente

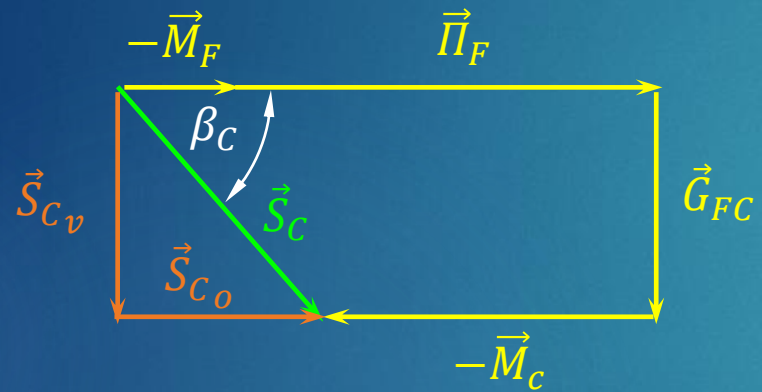
- $\beta = \frac{\int_{\Omega} u^2 d\Omega}{U^2 \Omega}$       coeff. di ragguglio delle quantità di moto (secondo coefficiente di Coriolis)

- $\vec{M}_C = \int_{\Omega_C} \rho \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{n} d\Omega = \int_{\Omega_C} \rho \vec{u} u d\Omega = \vec{i}_s \rho \beta U_c^2 \Omega_c$  , in asse

# Spinta sul convergente

## ► Determinazione della risultante

- Composizione vettoriale

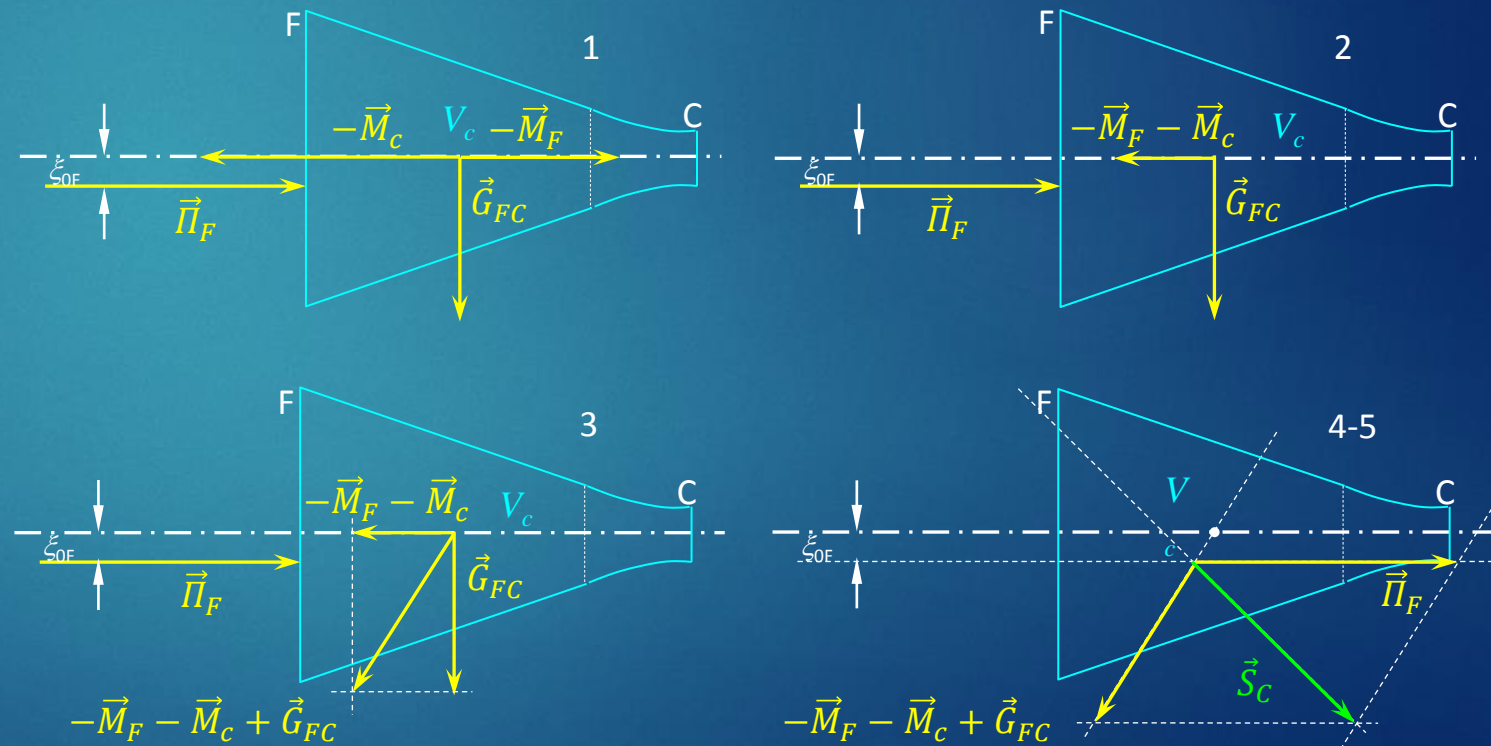


- Modulo e direzione

- $S_C = \sqrt{S_{C_o}^2 + S_{C_v}^2}$
- $\tan(\beta_C) = S_{C_v} / S_{C_o}$
- $S_{C_o} = M_F + \Pi_F - M_C$
- $S_{C_v} = G_{FC}$

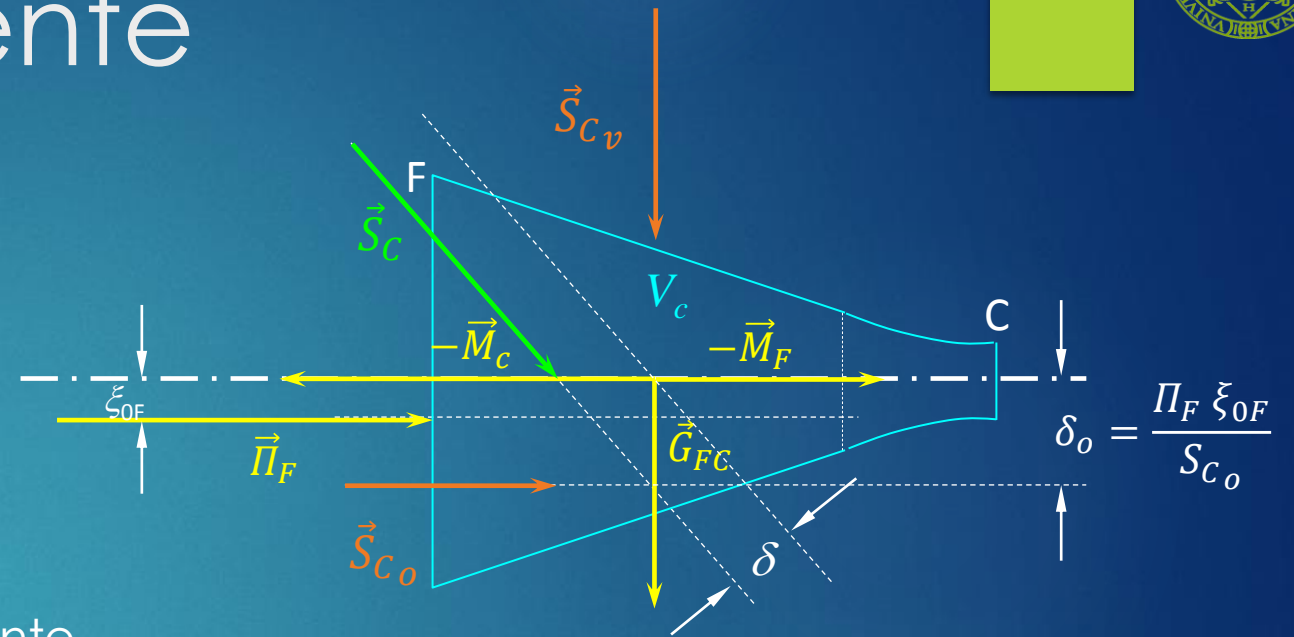
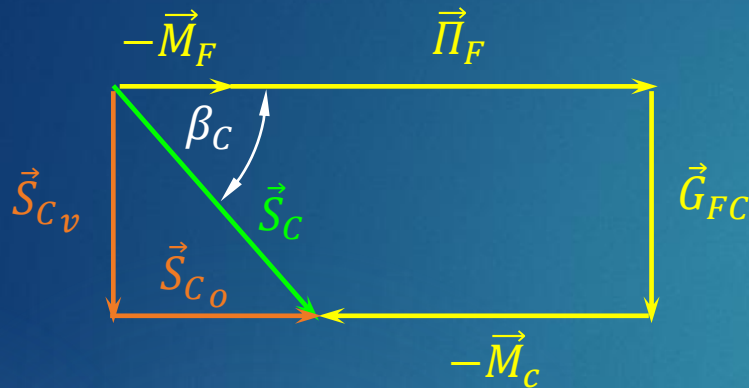
## ► Posizione della retta d'azione della risultante

- Metodo grafico: scorrimento e composizione delle forze





# Spinta sul convergente



## ► Posizione della retta d'azione della risultante

- Metodo semi-grafico
  - Calcolo momento risultante  $\vec{P}_F, \vec{G}_{FC}, -\vec{M}_C, -\vec{M}_F$ 
    - ✓ conveniente scelta polo = baricentro  $V_c$ :
 
$$\mathcal{M}_R = P_F \xi_{0F} \quad (\text{verso antiorario})$$
  - Uguaglianza momento della  $\vec{S}_C, \mathcal{M}_C = \delta S_C$
  - posizione retta d'azione di  $\vec{S}_C$  con braccio
 
$$\delta = \frac{P_F \xi_{0F}}{S_C} \quad (\text{verso antiorario})$$

## • Metodo analitico

- Applicazione componenti  $S_{C_o}$  e  $S_{C_v}$ 
  - ✓ conveniente scelta polo = baricentro  $V_c$ 

$$\mathcal{M}_o = P_F \xi_{0F} \quad (\text{verso antiorario}) ; \mathcal{M}_v = 0$$
- $\vec{S}_{C_v} \equiv \vec{G}_{FC}$  passante per baricentro  $V_c$
- $\vec{S}_{C_o}$  applicata con braccio  $\delta_o = \frac{P_F \xi_{0F}}{S_{C_o}}$
- $\vec{S}_C$  applicata in intersezione r.d.a.  $\vec{S}_{C_v}$  e  $\vec{S}_{C_o}$



# Spinta sulla piastra piana

## ► Equazione globale del moto

- Volume di controllo fra sezione cc e bordo piastra piana

$$\vec{I} + \vec{M} = \vec{G} + \vec{\Pi}$$

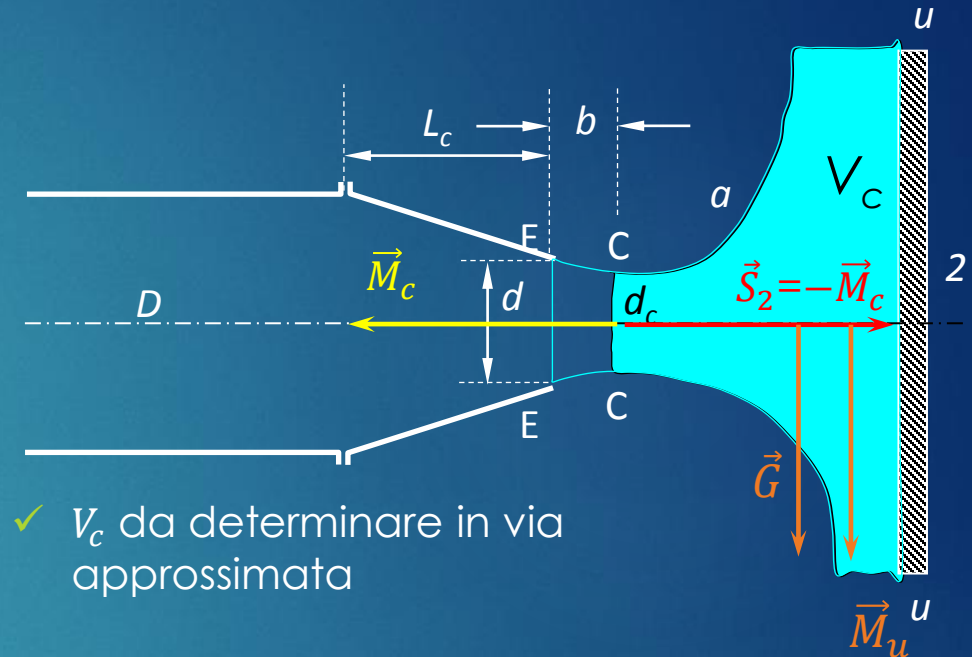
$$\vec{I} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \vec{u} dV \quad \vec{G} = \int_{V_c} \rho \vec{f}_m dV$$

$$\vec{M} = \int_{S_c} \rho \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{n} dS \quad \vec{\Pi} = \int_{S_c} \vec{\tau}_n dS$$

$$- \quad \vec{I} = 0 \quad ; \quad \vec{G} = \vec{G}_P = \int_{V_c} -\nabla z dV = -\gamma V_c \nabla z$$

$$\vec{M}_c + \vec{M}_u + \vec{M}_a + \vec{M}_2 = \vec{G}_P + \vec{\Pi}_c + \vec{\Pi}_u + \vec{\Pi}_a + \vec{\Pi}_2$$

- $\vec{M}_2 = 0$  per condizione di aderenza
- $\vec{M}_a = 0$  perché la superficie è un tubo di flusso
- $\vec{\Pi}_a = \vec{\Pi}_c = \vec{\Pi}_u = 0$  perché  $p = 0$
- $\vec{\Pi}_2 = -\vec{S}_2$  per il principio di azione e reazione



✓  $V_c$  da determinare in via approssimata

$$\vec{S}_2 = \vec{G}_P - \vec{M}_c - \vec{M}_u$$

- $\vec{M}_u$  è contenuto nel piano della piastra
- $\vec{S}_c$  è ortogonale alla piastra (effetto degli sforzi tangenziali trascurabili su brevi distanze)
- $\vec{S}_2 = -\vec{M}_c$  ;  $S_2 = M_c = \rho \beta U_c^2 \Omega_c = \rho \beta \frac{q^2}{\Omega_c}$
- $\vec{G}_P - \vec{M}_u = 0$